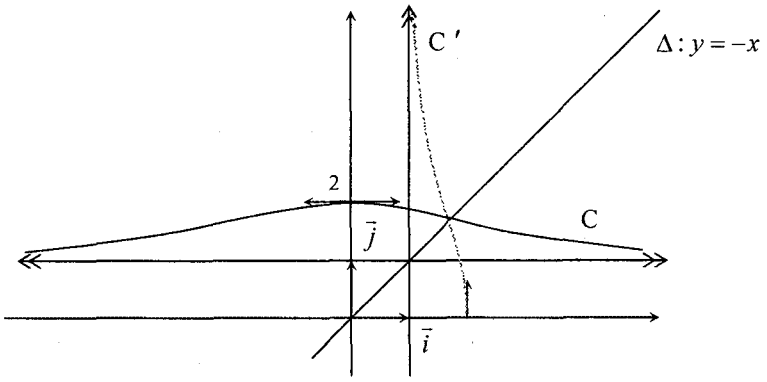

b) $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 2 = 0$

Soit $h(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $h'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Or $\Delta = -8 < 0$ donc $h'(x) > 0$ d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

h est continue et strictement croissantes sur $\mathbf{R}$ donc h réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par h et par suite l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbf{R}$.

On a : $\begin{cases} h(1) \cdot h(\dfrac{3}{2}) < 0 \\ h \text{ est continue sur } [\,1, \dfrac{3}{2}\,] \end{cases}$ donc $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

2°/a) g est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+) =]\,1,2\,]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]\,1,2\,]$.

b) $g^{-1} :]\,1,2\,] \to \mathbf{R} \ : x \mapsto g^{-1}(x) = y$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{y^2+2}{y^2+1} = x \Leftrightarrow y^2 + 2 = xy^2 + x \Leftrightarrow$$

$$y^2(1-x) = x - 2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x-2}{1-x} \ (\text{car } x \neq 1) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}} \ (\text{car } y \in \mathbf{R}_+)$$